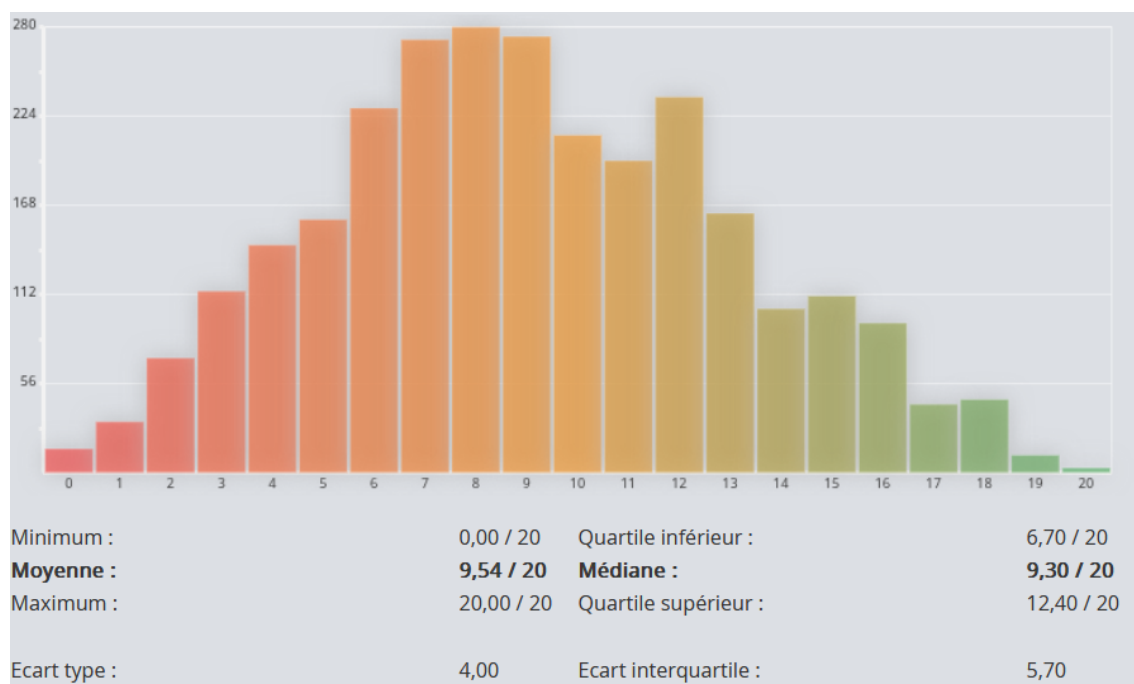


MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET INFORMATIQUE - 2026

I. Statistiques de l'épreuve



II. Introduction

Le sujet s'intéressait aux fonctions génératrices de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. La partie I introduisait cette notion et établissait plusieurs propriétés générales utilisées dans la suite du problème. Les parties II et III proposaient l'étude de deux modèles probabilistes. Dans la partie II, on s'intéressait à la croissance et à la floraison de jacinthes. Trois approches complémentaires étaient proposées : une première directe, une deuxième utilisant les fonctions génératrices et une troisième fondée sur une réinterprétation probabiliste du modèle. La partie III était consacrée à l'étude de l'évolution d'une population d'euglènes modélisée par un processus de Galton-Watson dont la loi de reproduction possède un support fini. Les fonctions génératrices y jouaient un rôle central, permettant de décrire le comportement asymptotique de la population et d'étudier sa probabilité d'extinction. La partie IV abordait enfin une problématique de représentation graphique et d'approximation empirique de fonctions génératrices à l'aide d'outils probabilistes et informatiques.

III. Remarques générales

Le sujet était long ; traiter convenablement un grand nombre des questions 1 à 22 permettait d'obtenir une très bonne note. La partie I a révélé certaines fragilités sur des notions classiques d'analyse, d'algèbre, de probabilités ou de logique élémentaire. La partie II a été la mieux réussie de l'épreuve sur les plans mathématique, informatique et de la modélisation. Le modèle introduit dans la partie III a généralement été bien compris et les premières questions correctement traitées. Certaines candidates et certains candidats ont toutefois tenté d'aborder des questions isolées sans traiter les résultats intermédiaires nécessaires, ce qui s'est souvent révélé inefficace ; les différentes parties du sujet étant indépendantes, il pouvait être plus judicieux de passer à la partie IV.

La présentation des copies était dans l'ensemble satisfaisante même si certaines demeurent difficiles à lire ou ne mettent pas suffisamment les résultats en valeur. Certaines candidates et certains candidats ne traitent pas correctement une question avant de faire apparaître plus loin dans la copie le bon résultat sans pour autant corriger leur réponse initiale. Dans les questions dont le résultat est annoncé dans

l'énoncé, les candidates et candidats peinent parfois à en identifier les enjeux mathématiques réels et se contentent alors d'arguments insuffisamment justifiés voire erronés.

Les questions informatiques ont été très largement abordées. Les questions mêlant informatique et probabilités ont souvent été bien réussies, aussi bien lorsqu'il s'agissait d'écrire une commande Python que d'interpréter un programme fourni. La question 23.4 constitue toutefois une exception notable et a été très rarement traitée correctement. Plus généralement, plusieurs erreurs auraient pu être évitées par une lecture attentive de l'annexe Python.

Les questions de modélisation ont elles aussi souvent été traitées ; celles faisant intervenir la loi binomiale ont généralement été bien réussies. Le jury rappelle qu'une réponse concise mais précise est attendue : de nombreuses candidates et de nombreux candidats restent trop vagues dans leurs interprétations des modèles étudiés.

IV. Difficultés mathématiques notables

- La convergence de la série définissant G_X à la question 1.1 n'a que trop rarement été correctement justifiée. La nécessité même d'étudier la convergence de cette série ne semble d'ailleurs souvent pas avoir été perçue.
- Il est fréquent de voir dériver spontanément la fonction génératrice sans s'interroger sur la validité de cette opération. Rappelons que pour établir la croissance d'une fonction, revenir directement à la définition peut parfois constituer une stratégie plus efficace.
- L'indice de sommation étant une variable muette, il convient de ne pas réutiliser une lettre déjà fixée dans l'énoncé pour indexer une somme.
- Bien que certains théorèmes classiques, comme le théorème de transfert ou la formule de König-Huygens, soient souvent cités, leurs hypothèses comme leurs conclusions demeurent insuffisamment maîtrisées.
- Pour établir une équivalence, de nombreuses candidates et de nombreux candidats indiquent procéder par double implication mais utilisent des symboles « $\Leftrightarrow$ » dans la rédaction du sens direct ; outre que ceci n'a aucun sens, cette rédaction conduit souvent à oublier de démontrer le sens réciproque.
- Dans la question 10.2, la composition et le produit de fonctions sont fréquemment confondus.
- Une confusion entre inégalité stricte et inégalité au sens large apparaît souvent.
- La définition d'un système complet d'événements est trop rarement connue avec précision.
- Les notions d'événements incompatibles et d'événements indépendants sont fréquemment confondues.
- Des confusions entre événements, variables aléatoires et lois de probabilité demeurent fréquentes. On rencontre ainsi des affirmations erronées comme « N et D ont même loi donc $N = D$ ».
- La notion de loi conditionnelle semble mal assimilée ; la question 20 n'a ainsi été que très rarement réussie alors qu'une lecture attentive du modèle de la partie III et une compréhension correcte du conditionnement suffisaient pour traiter cette question. Trop de candidates et de candidats semblent avoir le réflexe d'utiliser la formule de Bayes dès qu'apparaît un conditionnement, ce qui n'était pas pertinent ici.
- Peu de candidates et de candidats ont identifié dans la partie III que l'hypothèse (H_4) garantissait le caractère polynomial de la fonction génératrice, propriété pourtant essentielle pour faire le lien avec les résultats établis à la question 3. La question 27, souvent abordée sans avoir traité les questions précédentes, n'a ainsi que très rarement rapporté des points.

V. Difficultés informatiques notables

- On rappelle que la commande `rd.binomial(1, p)` renvoie 0 ou 1 ; une confusion entre l'entrée et la sortie de cette commande apparaît fréquemment (on rencontre ainsi des instructions telles que « `if rd.binomial(1, p) == p` », qui ne produisent évidemment pas le comportement attendu).

- Les explications de programmes Python se réduisent trop souvent à de la paraphrase ou à une description ligne par ligne du code. Il est attendu des candidates et candidats une prise de recul sur le fonctionnement global du programme.
- Plusieurs candidates et candidats indiquent simuler une probabilité ou un événement alors que les commandes Python proposées simulent en réalité des variables aléatoires.
- Dans la question 22.3, les parcours en profondeur et en largeur sont souvent confondus. Une réponse avec justification était par ailleurs attendue.
- Dans la question 30, la recherche dichotomique a souvent posé des difficultés ; la notion de « valeur approchée par excès » ne semble pas toujours avoir été bien comprise. Renvoyer b ne pouvait pas être une bonne idée puisque cette variable était définie à l'intérieur de la boucle while, dans laquelle le programme pouvait ne jamais entrer.

VI. Éléments de correction

Q 1.1. Soit $t \in [0,1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq P(X = n)t^n \leq P(X = n)$. Or, $(X = n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant une suite d'événements incompatibles, la série $\sum P(X = n)$ converge. Donc la série à termes positifs $\sum P(X = n)t^n$ converge, ce qui montre que G_X est bien définie en t , et ce pour tout $t \in [0,1]$. Donc G_X est au moins définie sur le segment $[0,1]$.

Q 1.2. On calcule : $G_X(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)0^n = P(X = 0)$ et $G_X(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)1^n = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)$. Or, X étant une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, $(X = n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements donc $\sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) = 1$. Ainsi $G_X(1) = 1$.

Q 1.3. Soit $(s,t) \in [0,1]^2$ tel que $s \leq t$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, par croissance de la fonction $u \in [0,1] \mapsto u^n$, on a : $s^n \leq t^n$ donc, comme $P(X = n) \geq 0$, $P(X = n)s^n \leq P(X = n)t^n$. En sommant sur $n \in \mathbb{N}$ (la question 1.1 assure que ces séries convergent), on obtient $G_X(s) \leq G_X(t)$, et ce pour tout $(s,t) \in [0,1]^2$, d'où la croissance de G_X sur $[0,1]$.

Q 1.4. D'après les questions 1.2 et 1.3, pour tout $t \in [0,1]$, $G_X(t) \in [P(X = 0), 1]$ donc $G_X(t) \in [0,1]$.

Q 1.5. Voici deux preuves.

Preuve 1. Soit $t \in [0,1]$. Alors $0 \leq t^X \leq 1$ donc t^X admet une espérance et, d'après la formule de transfert,

$$E(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)t^n = G_X(t).$$

Preuve 2. Soit $t \in [0,1]$. D'après la question 1.1, la série à termes positifs $\sum P(X = n)t^n$ converge donc, d'après la formule de transfert, t^X admet une espérance et

$$E(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)t^n = G_X(t).$$

Q 1.6. Soit $t \in [0,1]$. Alors $(t^X)^2 = t^{2X} = (t^2)^X$. Or, $t^2 \in [0,1]$. La question 1.5 assure alors que $(t^X)^2$ admet une espérance, donc que t^X admet une variance. Par ailleurs,

$$V(t^X) = E((t^X)^2) - E(t^X)^2 = E((t^2)^X) - E(t^X)^2 = G_X(t^2) - G_X(t)^2.$$

Comme t^2 appartient à $[0,1]$, la question 1.4 assure que $G_X(t^2) \leq 1$. Or, $G_X(t)^2 \geq 0$. D'où $V(t^X) \leq 1$.

Q 2. Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times [0,1]$ et $t \in [0,1]$. On calcule :

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^n P(X = k)t^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} t^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (pt)^k (1-p)^{n-k} = (pt + 1 - p)^n.$$

Q 3.1.

$\Rightarrow$ Supposons (i) : on dispose de $m \in \mathbb{N}$ tel que $P(X \leq m) = 1$. Alors pour tout entier $n > m$, comme $(X = n) \subset (X > m)$, on a : $P(X = n) \leq P(X > m) = 0$ donc $P(X = n) = 0$. Ainsi la suite des sommes partielles de la série $\sum P(X = n)t^n$ est stationnaire ; la série $\sum P(X = n)t^n$ converge donc (de somme $\sum_{n=0}^m P(X = n)t^n$), ce qui assure que G_X est bien définie en t , et ce pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Donc G_X est bien définie sur tout $\mathbb{R}$. Par ailleurs, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G_X(t) = \sum_{n=0}^m P(X = n)t^n$ donc la fonction $t \mapsto G_X(t)$ est un polynôme. On a donc bien établi (ii).

$\Leftarrow$ Supposons (ii), i.e. que la fonction $t \mapsto G_X(t)$ est définie sur tout $\mathbb{R}$ et il s'agit d'un polynôme. Remarquons que, d'après la question 1.2, $G_X(1) = 1$ donc ce polynôme G_X n'est pas nul ; on note $m \in \mathbb{N}$ son degré. Montrons que pour tout entier $n > m$, $P(X = n) = 0$. Soit donc un tel entier $n > m$. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, comme la série $\sum P(X = k)t^k$ est à termes positifs et convergente (puisque la fonction G_X est par hypothèse définie sur tout $\mathbb{R}$), on a : $0 \leq P(X = n)t^n \leq G_X(t)$, i.e. :

$$0 \leq P(X = n) \leq \frac{G_X(t)}{t^n}. \quad (1)$$

Or, en notant p_m le coefficient dominant de G_X , on a : $G_X(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} p_m t^m$ donc, comme $n > m$,

$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{G_X(t)}{t^n} = 0$. En passant à la limite dans (1), on obtient donc $P(X = n) = 0$, et ce pour tout

entier $n > m$. Or, en remarquant que $(X > m) = \bigcup_{n=m+1}^{+\infty} (X = n)$ et que $(X = n)_{n > m}$ est une suite

d'événements deux à deux incompatibles, on a $P(X > m) = \sum_{n=m+1}^{+\infty} P(X = n)$. Ainsi $P(X > m) = 0$,

ce qui montre que $P(X \leq m) = 1$. On a donc bien établi (i).

Finalement, les assertions (i) et (ii) sont équivalentes.

Q 3.2. D'après le corrigé du sens $\Rightarrow$ de la question 3.1 (et en en reprenant les notations), la série $\sum |n|P(X = n)$ converge (ici encore, la suite de ses sommes partielles est stationnaire donc converge)

donc X admet une espérance, qui vaut $E(X) = \sum_{n=1}^m nP(X = n)$, et tout $t \in \mathbb{R}$, $G_X(t) = \sum_{n=0}^m P(X = n)t^n$

donc G_X est dérivable sur $\mathbb{R}$ (donc en 1) et tout $t \in \mathbb{R}$, $(G_X)'(t) = \sum_{n=1}^m nP(X = n)t^{n-1}$ donc $(G_X)'(1) =$

$\sum_{n=1}^m nP(X = n)$. Ainsi $E(X) = (G_X)'(1)$.

Q 4.

$\Rightarrow$ Supposons (i), i.e. que X et Y ont même loi. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(X = n) = P(Y = n)$ donc $G_X = G_Y$, ce qui montre (ii).

$\Leftarrow$ Supposons (ii), i.e. que pour tout $t \in [0,1]$, $G_X(t) = G_Y(t)$. Comme X est à valeurs dans $\{0, \dots, m\}$, $P(X \leq m) = 1$ donc, d'après la question 3.1, G_X est un polynôme. De même, G_Y est un polynôme. Comme pour tout $t \in [0,1]$, $G_X(t) - G_Y(t) = 0$, le polynôme $G_X - G_Y$ possède une infinité de racines donc c'est le polynôme nul, ce qui montre que $G_X = G_Y$. Les coefficients de ces polynômes sont donc égaux, i.e. pour $n \in \mathbb{N}$, $P(X = n) = P(Y = n)$, ce qui montre que X et Y ont même loi.

Finalement, les assertions (i) et (ii) sont équivalentes.

Q 5. D'après les hypothèses (A_1) et (A_3) , J_1 suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_1)$.

Q 6. Voici deux preuves.

Preuve 1. J_2 est à valeurs dans $\{0,1,2\}$. Comme $(J_1 = i)_{i \in \{0,1,2\}}$ est un système complet d'événements ayant

tous une probabilité non nulle (d'après la question 5), la formule des probabilités totales assure que

$$\begin{aligned} P(J_2 = 0) &= P(J_2 = 0|J_1 = 0) \times P(J_1 = 0) + P(J_2 = 0|J_1 = 1) \times P(J_1 = 1) + P(J_2 = 0|J_1 = 2) \times P(J_1 = 2) \\ &= 1 \times (1 - p_1)^2 + (1 - p_2) \times 2p_1(1 - p_1) + (1 - p_2)^2 \times p_1^2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P(J_2 = 2) &= P(J_2 = 2|J_1 = 0) \times P(J_1 = 0) + P(J_2 = 2|J_1 = 1) \times P(J_1 = 1) + P(J_2 = 2|J_1 = 2) \times P(J_1 = 2) \\ &= 0 \times (1 - p_1)^2 + 0 \times 2p_1(1 - p_1) + p_2^2 \times p_1^2. \end{aligned}$$

Enfin, $P(J_2 = 1) = 1 - P(J_2 = 0) - P(J_2 = 2)$. L'application numérique donne $P(J_2 = 0) = \frac{1}{4}$, $P(J_2 = 1) = \frac{1}{2}$ et $P(J_2 = 2) = \frac{1}{4}$, ce qui montre d'ailleurs que J_2 suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(2, \frac{1}{2}\right)$.

Preuve 2. On étudie successivement chacun des deux bulbes. Chacun a une probabilité $p_1 p_2 = \frac{1}{2}$ d'à la fois franchir le seuil de hauteur et de fleurir donc J_2 suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(2, \frac{1}{2}\right)$.

Q 7.1.

```
def J2(n, p1, p2):
    aux = 0
    l = [0 for i in range(n)]
    for i in range(n):
        if rd.binomial(1, p1) == 1:
            l[i] = 1
    for i in range(n):
        if l[i] == 1:
            if rd.binomial(1, p2) == 1:
                aux = aux + 1
    return aux
```

Q 7.2. La boucle des lignes 4 à 6 donne le statut « seuil de hauteur atteint/non atteint » de chacune des n jacinthes. Celle des lignes 7 à 10 indique qui, parmi les jacinthes ayant atteint le seuil de hauteur, a fleuri.

Q 8.1. J_1 étant une v.a. à valeurs dans $\{0, \dots, n\}$, $(J_1 = i)_{i \in \{0, \dots, n\}}$ est un système complet d'événements.

Q 8.2. La question 5 assure que $P(J_1 = i) = \binom{n}{i} (p_1)^i (1 - p_1)^{n-i}$ donc, comme $p_1 \in]0, 1[$, $P(J_1 = i) > 0$.

D'après les hypothèses (A_2) , (A_3) et (A_4) , conditionnellement à l'événement $(J_1 = i)$, J_2 suit la loi binomiale $\mathcal{B}(i, p_2)$.

Q 8.3. Soit $\ell \in \{0, 1, \dots, n\}$. Les questions 8.1 et 8.2 assurent que $(J_1 = i)_{i \in \{0, \dots, n\}}$ est un système complet d'événements non négligeables donc, d'après formule des probabilités totales,

$$P(J_2 = \ell) = \sum_{i=0}^n P(J_2 = \ell | J_1 = i) P(J_1 = i)$$

Or, comme $J_1 \geq J_2$, on a, pour tout $i < \ell$, $P(J_2 = \ell | J_1 = i) = 0$. Donc

$$P(J_2 = \ell) = \sum_{i=\ell}^n P(J_2 = \ell | J_1 = i) P(J_1 = i)$$

Les questions 5 et 8.2 assurent alors que $P(J_2 = \ell) = \sum_{i=\ell}^n \binom{i}{\ell} (p_2)^\ell (1 - p_2)^{i-\ell} \binom{n}{i} (p_1)^i (1 - p_1)^{n-i}$.

Q 8.4. Pour tous $\ell \in \{0, 1, \dots, n\}$ et $i \in \{\ell, \dots, n\}$,

$$\binom{i}{\ell} \binom{n}{i} = \frac{i!n!}{\ell!(i-\ell)!i!(n-i)!} = \frac{n!}{\ell!(i-\ell)!(n-i)!} = \frac{n!(n-\ell)!}{\ell!(n-\ell)!(i-\ell)!(n-i)!} = \binom{n}{\ell} \binom{n-\ell}{i-\ell}$$

Q 8.5. Soit $\ell \in \{0, 1, \dots, n\}$. D'après les questions 8.3 et 8.4,

$$\begin{aligned}
 P(J_2 = \ell) &= \sum_{i=\ell}^n \binom{n}{\ell} \binom{n-\ell}{i-\ell} (p_2)^\ell (1-p_2)^{i-\ell} (p_1)^i (1-p_1)^{n-i} \\
 &= \binom{n}{\ell} (p_2)^\ell \sum_{i=\ell}^n \binom{n-\ell}{i-\ell} (1-p_2)^{i-\ell} (p_1)^i (1-p_1)^{n-i} \\
 &= \binom{n}{\ell} (p_2)^\ell \sum_{j=0}^{n-\ell} \binom{n-\ell}{j} (1-p_2)^j (p_1)^{\ell+j} (1-p_1)^{n-\ell-j} \\
 &= \binom{n}{\ell} (p_1 p_2)^\ell \sum_{j=0}^{n-\ell} \binom{n-\ell}{j} (p_1 - p_1 p_2)^j (1-p_1)^{n-\ell-j} \\
 &= \binom{n}{\ell} (p_1 p_2)^\ell (p_1 - p_1 p_2 + 1 - p_1)^{n-\ell} \\
 &= \binom{n}{\ell} (p_1 p_2)^\ell (1 - p_1 p_2)^{n-\ell}
 \end{aligned}$$

ce qui montre que J_2 suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_1 p_2)$.

Q 9. La commande `mystere1(n, p1, p2)` simule et renvoie le nombre de jacinthes qui ont atteint vingt centimètres et qui ont fleuri lorsque n bulbes ont initialement été étudiés et que la probabilité de succès à l'étape 1 (respectivement 2) est p_1 (respectivement p_2). En effet, la ligne 2 simule le nombre i de jacinthes ayant atteint le seuil de hauteur, modélisant ainsi la phase de croissance, tandis que la phase de floraison est modélisée à la ligne 3.

Q 10.1. Il suffit de noter $X_1, \dots, X_n$ les variables aléatoires donnant 1 si la jacinthe a réussi à fleurir et 0 sinon, en commençant par lister les jacinthes ayant atteint le seuil de hauteur. Les hypothèses faites sur le modèle impliquent que ces variables aléatoires de Bernoulli sont de paramètre p_2 , indépendantes et indépendantes de la phase de croissance donc en particulier de J_1 .

Q 10.2. Puisque X_1 suit la loi binomiale $\mathcal{B}(1, p_2)$ et que, d'après la question 5, J_1 suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_1)$, la question 2 assure que pour tout $t \in [0, 1]$, $G_{X_1}(t) = p_2 t + 1 - p_2$ et $G_{J_1}(t) = (p_1 t + 1 - p_1)^n$ donc $G_{J_2}(t) = G_{J_1}(G_{X_1}(t)) = G_{J_1}(p_2 t + 1 - p_2) = (p_1(p_2 t + 1 - p_2) + 1 - p_1)^n = (p_1 p_2 t + 1 - p_1 p_2)^n$.

Q 10.3. Notons T une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(n, p_1 p_2)$. D'après les questions 2 et 10.2, $G_{J_2} = G_T$. Or, J_2 et T sont à valeurs dans $\{0, \dots, n\}$. La question 4 (sens difficile) assure alors que J_2 et T ont même loi, i.e. J_2 suit la loi $\mathcal{B}(n, p_1 p_2)$.

Q 11.1. Dans ce nouveau modèle, une jacinthe donnée est retenue si et seulement si elle atteint le seuil de hauteur (ce qui arrive avec probabilité p_1) et réussit à fleurir (ce qui arrive avec probabilité p_2). L'indépendance de ces événements donnée par l'hypothèse (A_4) assure que la probabilité d'être finalement retenue est donc de $p_1 p_2$.

Q 11.2. J_2 étant la somme de n variables de Bernoulli indépendantes (d'après l'hypothèse (A_3)) de paramètre égal à $p_1 p_2$ (d'après la question 11.1), J_2 suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_1 p_2)$.

Q 12. Dans `mystere2`, on étudie la phase de croissance des n jacinthes (à la ligne 8) puis leur phase de floraison (à la ligne 9); ne sont déclarés retenues (à la ligne 10) que celles qui ont réussi les deux étapes. Ainsi, la commande `mystere2(n, p1, p2)` simule et renvoie le nombre de jacinthes qui ont atteint vingt centimètres et qui ont fleuri lorsque n bulbes ont initialement été étudiés et que la probabilité de succès à l'étape 1 (respectivement 2) est p_1 (respectivement p_2).

Q 13. L'hypothèse (H_3) indique que les descendances journalières de toutes les euglènes suivent la même loi, (H_5) que les euglènes engendrent au plus m descendants en une journée et (H_6) que les descendances des euglènes sont indépendantes.

Q 14. Par définition, $N_0 = 1$ et $N_1 = \sum_{k=1}^{N_0} D_{0,k}$ donc $N_1 = D_{0,1}$. D'après l'hypothèse (H_3) , N_1 a donc même loi que D .

Q 15. Montrons par récurrence sur $j \in \mathbb{N}$ que pour tout $j \in \mathbb{N}$, N_j est à valeurs dans $\{0, 1, \dots, m^j\}$. Puisque $N_0 = 1$, cette propriété est vraie pour $j = 0$, d'où l'initialisation.

Soit $j \in \mathbb{N}$ tel que N_j soit à valeurs dans $\{0, 1, \dots, m^j\}$. Soit $\omega \in \Omega$. On a : $N_{j+1}(\omega) = \sum_{k=1}^{N_j(\omega)} D_{j,k}(\omega)$. Or, $N_j(\omega) \in \{0, 1, \dots, m^j\}$ et pour tout $k \in \{0, 1, \dots, m^j\}$, $D_{j,k}(\omega) \in \{0, 1, \dots, m\}$ donc d'une part $N_{j+1}(\omega) \in \mathbb{N}$ et

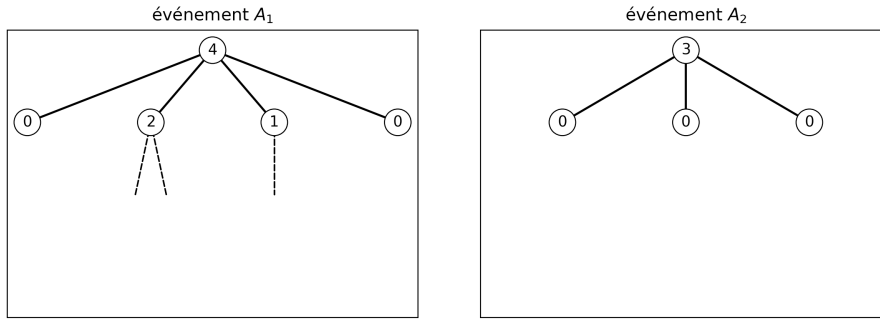
$$N_{j+1}(\omega) \leq \sum_{k=1}^{m^j} D_{j,k}(\omega) \leq \sum_{k=1}^{m^j} m = m^{j+1}$$

donc $N_{j+1}(\omega) \in \{0, 1, \dots, m^{j+1}\}$, ce qui établit l'hérédité.

Finalement, d'après le principe de récurrence, pour tout $j \in \mathbb{N}$, N_j est à valeurs dans $\{0, 1, \dots, m^j\}$.

Q 16. L'hypothèse (H_4) assure d'une part que D est à valeurs dans $\{0, 1, \dots, m\}$ donc $P(D \in \{0, 1, \dots, m\}) = 1$ donc pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, \dots, m\}$, $P(D = n) = 0$ donc $S \subset \{0, 1, \dots, m\}$. D'autre part, $P(D = m) > 0$ donc $m \in S$.

Q 17.1. Voici les représentations arborescentes des événements A_1 et A_2 .



Q 17.2. L'indépendance des v.a. $D_{j,k}$ assure que

$$P(A_1) = P(D_{0,1} = 4)P(D_{1,1} = 0)P(D_{1,2} = 2)P(D_{1,3} = 1)P(D_{1,4} = 0) = (p_0)^2 p_1 p_2 p_4$$

et

$$P(A_2) = P(D_{0,1} = 3)P(D_{1,1} = 0)P(D_{1,2} = 0)P(D_{1,3} = 0) = (p_0)^3 p_3$$

Q 17.3. Comme $\{0, 1, 2, 3, 4\} \subset S$, on a : $p_0 > 0$, $p_1 > 0$, $p_2 > 0$, $p_3 > 0$ et $p_4 > 0$ donc $P(A_1) > 0$ et $P(A_2) > 0$.

Q 17.4. Conditionnellement à A_1 , au jour 2, la population comporte trois euglènes donc $n = 3$ convient : $A_1 \subset (N_2 = 3)$ (cet entier n est unique puisque pour tout $\ell \in \mathbb{N} \setminus \{3\}$, les événements $(N_2 = 3)$ et $(N_2 = \ell)$ sont incompatibles et $A_1 \neq \emptyset$ puisque $P(A_1) > 0$).

Q 17.5. En notant $A_3 = (D_{0,1} = 4, D_{1,1} = 2, D_{1,2} = 0, D_{1,3} = 1, D_{1,4} = 0)$, on remarque que :

$$P(A_3) = (p_0)^2 p_1 p_2 p_4 > 0, \quad A_3 \subset (N_2 = 3) \quad \text{et} \quad A_1 \cap A_3 = \emptyset$$

donc $P(N_2 = n) \geq P(A_1) + P(A_3) > P(A_1)$ ce qui montre que $P(A_1) < P(N_2 = 3)$.

Q 18.1. Soit $j \in \mathbb{N}$. La v.a. N_j est une fonction déterministe des v.a. $D_{i,k}$ (où $i \in \{0, \dots, j-1\}$ et $k \in \{1, \dots, m^i\}$) donc, d'après le lemme des coalitions et l'hypothèse (H_6) , les $(m^j + 1)$ variables aléatoires $D_{j,1}, D_{j,2}, \dots, D_{j,m^j}$ et N_j sont indépendantes.

Q 18.2. Soit $j \in \mathbb{N}$ et $n \in \{0, 1, \dots, m^{j+1}\}$. La question 15 assure que $(N_j = \ell)_{\ell \in \{0, \dots, m^j\}}$ est un système complet d'événements. La formule des probabilités totales assure alors que

$$P(N_{j+1} = n) = \sum_{\ell=0}^{m^j} P(N_j = \ell, N_{j+1} = n) = \sum_{\ell=0}^{m^j} P\left(N_j = \ell, \sum_{k=1}^{N_j} D_{j,k} = n\right) = \sum_{\ell=0}^{m^j} P\left(N_j = \ell, \sum_{k=1}^{\ell} D_{j,k} = n\right).$$

Or, d'après la question 18.1, les v.a. $D_{j,1}, \dots, D_{j,m^j}$ et N_j sont indépendantes donc d'après le lemme des coalitions, pour tout $\ell \in \{0, \dots, m^j\}$, les v.a. N_j et $\sum_{k=1}^{\ell} D_{j,k}$ sont indépendantes donc

$$P(N_{j+1} = n) = \sum_{\ell=0}^{m^j} P(N_j = \ell) P\left(\sum_{k=1}^{\ell} D_{j,k} = n\right).$$

Q 18.3. L'hypothèse (H_4) et la question 15 assure que D , N_j et N_{j+1} sont à valeurs respectivement dans $\{0, 1, \dots, m\}$, $\{0, 1, \dots, m^j\}$ et $\{0, 1, \dots, m^{j+1}\}$ donc admettent des espérances. La question 18.2 assure alors que

$$E(N_{j+1}) = \sum_{n=0}^{m^{j+1}} n \sum_{\ell=0}^{m^j} P(N_j = \ell) P\left(\sum_{k=1}^{\ell} D_{j,k} = n\right) = \sum_{\ell=0}^{m^j} P(N_j = \ell) \sum_{n=0}^{m^{j+1}} n P\left(\sum_{k=1}^{\ell} D_{j,k} = n\right).$$

Or, d'après (H_5) , les v.a. $D_{j,1}, \dots, D_{j,m^j}$ sont à valeurs dans $\{0, 1, \dots, m\}$ donc pour tout $\ell \in \{0, \dots, m^j\}$, $\sum_{k=1}^{\ell} D_{j,k}$ est à valeurs dans $\{0, 1, \dots, m\ell\}$ donc dans $\{0, 1, \dots, m^{j+1}\}$ donc $\sum_{n=0}^{m^{j+1}} n P\left(\sum_{k=1}^{\ell} D_{j,k} = n\right) = E\left(\sum_{k=1}^{\ell} D_{j,k}\right)$, qui vaut $\ell E(D)$ d'après (H_3) et la linéarité de l'espérance. Finalement,

$$E(N_{j+1}) = \sum_{\ell=0}^{m^j} P(N_j = \ell) \ell E(D) = E(D) E(N_j).$$

Q 18.4. La question 18.3 assure que la suite $(E(N_j))_{j \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $E(D)$. Par ailleurs, comme $N_0 = 1$, le premier terme de cette suite est 1. On en déduit que pour tout $j \in \mathbb{N}$, $E(N_j) = E(D)^j$.

Q 19. Si $E(D) > 1$ alors, d'après la question 18.4, $\lim_{j \rightarrow +\infty} E(N_j) = +\infty$. Or, si la population d'euglènes devient trop importante, il est peu réaliste d'observer la même loi de reproduction journalière que celle du début de l'expérience, lorsque très peu d'euglènes étaient présentes. De même, l'hypothèse selon laquelle le nombre de descendants produits par une euglène donnée serait indépendant du comportement des générations précédentes est discutable : en réalité, la taille de la population influe sur le nombre de descendants par euglène.

Q 20. Conditionnellement à A_1 , au jour 2, la population comporte trois euglènes. Étant supposées indépendantes entre elles et chacune suivant la même loi de comportement que l'euglène initiale, $P(E_0|A_1) = \alpha^3$. Conditionnellement à A_2 , au jour 2, aucune euglène ne vit donc $A_2 \subset E_0 : P(E_0|A_2) = 1$.

Q 21.1. Puisque D est à valeurs dans $\{0, 2\}$ et que $P(D = 2) = p > 0$, l'hypothèse (H_4) est satisfaite en prenant $m = 2$.

Q 21.2. Voici deux preuves.

Preuve 1. Pour tout $t \in [0, 1]$, $G_D(t) - t = pt^2 - t + (1 - p)$ donc 1 est racine du polynôme $pT^2 - T + (1 - p) \in \mathbb{R}[T]$. Comme le produit des racines de ce polynôme du second degré est $\frac{1-p}{p}$, on en déduit que ses racines sont 1 et $\frac{1-p}{p}$. Or, si $p \leq \frac{1}{2}$, alors $\frac{1-p}{p} \geq 1$; l'équation $pt^2 - t + (1 - p) = 0$ d'inconnue $t \in [0, 1]$ possède donc 1 comme unique solution lorsque $p \leq \frac{1}{2}$. En revanche, si $p > \frac{1}{2}$, alors $\frac{1-p}{p} < 1$ donc la plus petite solution de l'équation $pt^2 - t + (1 - p) = 0$ d'inconnue $t \in [0, 1]$ est $\frac{1-p}{p}$. Finalement,

$\alpha_p = 1$ si $p \leq \frac{1}{2}$ tandis que $\alpha_p = \frac{1-p}{p}$ si $p > \frac{1}{2}$. On peut regrouper les deux cas en écrivant que $\alpha_p = \min\left\{1, \frac{1-p}{p}\right\}$.

Preuve 2. Pour tout $t \in [0,1]$, $G_D(t) - t = pt^2 - t + (1 - p)$. Or, le discriminant Δ du polynôme $pt^2 - t + (1 - p) \in \mathbb{R}[T]$ valant $\Delta = 1 - 4p(1 - p) = (2p - 1)^2$, l'ensemble de ses racines est $\left\{ \frac{1 - (2p - 1)}{2p}, \frac{1 + (2p - 1)}{2p} \right\}$, c'est-à-dire $\left\{ \frac{1 - p}{p}, 1 \right\}$. On peut alors le raisonnement de la preuve 1.

Q 21.3. D'après la question 21.2, la fonction $p \in]0,1] \mapsto \alpha_p$ est décroissante (plus précisément, la fonction $p \in]0,1/2] \mapsto \alpha_p$ est constante égale à 1 tandis que la fonction $p \in [1/2,1] \mapsto \alpha_p = -1 + 1/p$ est strictement décroissante). Cette décroissance s'explique par le fait que plus le paramètre p augmente, plus les euglènes ont de chance d'avoir des descendants, diminuant ainsi la probabilité α_p d'extinction de la population.

Q 22.1. Les lignes 4 à 6 simulent le nombre d'euglènes présentes au jour $i + 1$ si N euglènes étaient présentes au jour i : chacune de ces N euglènes engendre un nombre aléatoire de descendants simulé par la commande `simule_D()`.

Q 22.2. La variable `N1` présente à la ligne 16 modélise le nombre d'euglènes présentes au jour 1 issues de l'euglène originelle.

Q 22.3. La commande `extinction_iter(j)` simule les générations les unes après les autres via la boucle

```
for i in range(j):
```

présente à la ligne 3 ; elle réalise donc un parcours en largeur de l'arbre associé à l'expérience.

La commande `extinction_rec(j)`, en revanche, suit une lignée jusqu'éventuellement la génération j via la boucle

```
for k in range(N1):
```

présente à la ligne 17 ; elle réalise donc un parcours en profondeur de l'arbre associé à l'expérience. Ainsi, la commande `extinction_rec(j)` arrête le programme et renvoie `False` dès qu'elle décèle une euglène présente au jour j . La commande `extinction_iter(j)`, quant à elle, doit passer en revue toutes les générations d'euglènes avant d'informer de la présence ou non d'euglènes au jour j . La commande `extinction_rec(j)` est donc bien plus efficace pour trouver une euglène présente au jour j , mais les deux commandes sont aussi rapides en cas d'extinction de la population au jour j .

Q 23.1. Puisque D est à valeurs dans $\{0,2\}$ et que $P(D = 2) = \frac{1}{2} > 0$, l'hypothèse (H_4) est satisfaite en prenant $m = 2$.

Q 23.2.

- Pour tout $t \in [0,1]$, $G_D(t) - t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t^2 - t = \frac{t^2 - 2t + 1}{2} = \frac{(t - 1)^2}{2}$ donc $G_D(t) - t = 0$ si et seulement si $t = 1$ donc $\alpha = 1$.
- On remarque que $(J = 0) = \Omega \setminus E_0$ donc $P(J = 0) = 1 - \alpha$, i.e. $P(J = 0) = 0$.

Q 23.3. D'après le résultat admis¹, $jP(J = j) \underset{j \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{j}$. Or, la série à termes positifs $\sum \frac{2}{j}$ diverge. On en déduit que la série $\sum jP(J = j)$ diverge. Donc la variable aléatoire J n'admet pas d'espérance.

Q 23.4.

```
def temps_extinction():
    if rd.binomial(1, 0.5) == 0:
```

1. Voici une preuve de l'équivalent $P(J = j) \underset{j \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{j^2}$. On peut aisément montrer (cf. preuve de la question 24.3) que $P(J = j) = a_j - a_{j-1}$. Or, d'après la question 25.3, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $a_{j+1} = G_D(a_j)$ donc $a_{j+1} = \frac{1 + (a_j)^2}{2}$ puis $\frac{1}{1 - a_{j+1}} - \frac{1}{1 - a_j} = \frac{1}{1 + a_j} \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$. Le lemme de Cesàro (hors-programme en filière BCPST) assure alors que $\frac{1}{1 - a_j} - \frac{1}{1 - a_0} \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \frac{j}{2}$ donc $1 - a_j \underset{j \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{j}$ et finalement $a_j - a_{j-1} = \frac{(1 - a_j)^2}{2} \sim \frac{2}{j^2}$.

```

return 1
else:
    t1 = temps_extinction()
    t2 = temps_extinction()
    return 1 + max(t1,t2)

```

Q 24.1. Il est clair que pour tout $j \in \mathbb{N}$, l'événement $(N_{j+1} = 0)$ est inclus dans l'événement E_0 donc

$$(N_{j+1} = 0, N_j \neq 0) \subset E_0 \text{ puis } \bigcup_{j=0}^{+\infty} (N_{j+1} = 0, N_j \neq 0) \subset E_0.$$

Soit maintenant $\omega \in E_0$; l'ensemble $\{j \in \mathbb{N}; N_{j+1}(\omega) = 0\}$ est alors non vide. Notons j_0 son plus petit élément. Alors $N_{j_0+1}(\omega) = 0$ donc $\omega \in (N_{j_0+1} = 0)$

Si $j_0 = 0$, comme $N_0 = 1$, on a : $N_{j_0}(\omega) \neq 0$ donc $\omega \in (N_{j_0} \neq 0)$.

Si $j_0 \neq 0$, alors par définition de j_0 , $N_{j_0}(\omega) \neq 0$ donc $\omega \in (N_{j_0} \neq 0)$.

Finalement, dans tous les cas, $\omega \in (N_{j_0+1} = 0, N_{j_0} \neq 0)$ donc $\omega \in \bigcup_{j=0}^{+\infty} (N_{j+1} = 0, N_j \neq 0)$, et ce pour tout

$$\omega \in E_0, \text{ donc } E_0 \subset \bigcup_{j=0}^{+\infty} (N_{j+1} = 0, N_j \neq 0).$$

$$\text{Finalement, } E_0 = \bigcup_{j=0}^{+\infty} (N_{j+1} = 0, N_j \neq 0).$$

Q 24.2. Soit $j \in \mathbb{N}$ et $\omega \in \Omega$.

- Supposons $\omega \in (N_{j+1} = 0)$; ainsi $N_{j+1}(\omega) = 0$. Distinguons deux cas : soit $N_j(\omega) \neq 0$ et alors $\omega \in (N_j \neq 0)$ donc, par hypothèse, $\omega \in (N_{j+1} = 0, N_j \neq 0)$, soit $N_j(\omega) = 0$ et alors $\omega \in (N_j = 0)$. Finalement, $\omega \in (N_{j+1} = 0, N_j \neq 0) \cup (N_j = 0)$.
- Supposons $\omega \in (N_{j+1} = 0, N_j \neq 0) \cup (N_j = 0)$; ainsi ou bien $N_{j+1}(\omega) = 0$ et $N_j(\omega) \neq 0$ ou bien $N_j(\omega) = 0$. Dans le premier cas, comme $N_{j+1}(\omega) = 0$, on a bien $\omega \in (N_{j+1} = 0)$. Dans le second cas, comme il n'y plus d'euglène au jour j , il n'y en a pas non plus au jour $j+1$: $N_{j+1}(\omega) = 0$ donc $\omega \in (N_{j+1} = 0)$. Finalement, dans tous les cas, $\omega \in (N_{j+1} = 0)$.

Finalement, pour tout $\omega \in \Omega$, $\omega \in (N_{j+1} = 0)$ si et seulement si $\omega \in (N_{j+1} = 0, N_j \neq 0) \cup (N_j = 0)$, ce qui montre que $(N_{j+1} = 0) = (N_{j+1} = 0, N_j \neq 0) \cup (N_j = 0)$.

Q 24.3. Montrons dans un premier temps que les événements $((N_{j+1} = 0, N_j \neq 0))_{j \in \mathbb{N}}$ sont deux à deux incompatibles. Soit donc $(j, k) \in \mathbb{N}^2$ et $\omega \in (N_{j+1} = 0, N_j \neq 0) \cap (N_{k+1} = 0, N_k \neq 0)$. Comme $N_j(\omega) \neq 0$ et $N_{k+1}(\omega) = 0$, la population d'euglènes n'est pas éteinte au jour j mais l'est au jour $k+1$ donc $j < k+1$, i.e. $j \leq k$. j et k jouant un rôle symétrique, on a de même $k \leq j$ et finalement $j = k$. Ainsi, les événements $((N_{j+1} = 0, N_j \neq 0))_{j \in \mathbb{N}}$ sont deux à deux incompatibles. On en déduit que

$$P\left(\bigcup_{j=0}^{+\infty} (N_{j+1} = 0, N_j \neq 0)\right) = \sum_{j=0}^{+\infty} P(N_{j+1} = 0, N_j \neq 0)$$

donc, d'après la question 24.1, $\alpha = \sum_{j=0}^{+\infty} P(N_{j+1} = 0, N_j \neq 0)$. Or, d'après la question 24.2, pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$(N_{j+1} = 0) = (N_{j+1} = 0, N_j \neq 0) \cup (N_j = 0)$ donc, comme les événements $(N_{j+1} = 0, N_j \neq 0)$ et $(N_j = 0)$ sont incompatibles, $a_{j+1} = P(N_{j+1} = 0, N_j \neq 0) + a_j$, i.e. $P(N_{j+1} = 0, N_j \neq 0) = a_{j+1} - a_j$. On en déduit que $\alpha = \sum_{j=0}^{+\infty} (a_{j+1} - a_j)$.

Q 24.4. On en déduit que $\alpha = \lim_{j \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{j-1} (a_{k+1} - a_k) = \lim_{j \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{j-1} a_{k+1} - \sum_{k=0}^{j-1} a_k = \lim_{j \rightarrow +\infty} a_j - a_0 = \lim_{j \rightarrow +\infty} a_j$ puisque $a_0 = 0$. Finalement, $\lim_{j \rightarrow +\infty} a_j = \alpha$.

Q 25.1. Soit $j \in \mathbb{N}$. D'après la question 14 et par définition de S , $(N_1 = n)_{n \in S}$ est un système quasi-complet

d'événements non négligeables. La formule des probabilités totales assure alors que $P(N_{j+1} = 0) = \sum_{n \in S} P(N_1 = n)P(N_{j+1} = 0|N_1 = n)$. La question 14 assure alors que $a_{j+1} = \sum_{n \in S} p_n P(N_{j+1} = 0|N_1 = n)$.

Q 25.2. Soit $n \in S$ et $\omega \in (N_1 = n)$: au jour 1, la population comporte n euglènes, notées $\mathcal{E}_1(\omega), \dots, \mathcal{E}_n(\omega)$. Notons, pour tous $k \in \{1, \dots, n\}$ et $j \in \mathbb{N}^*$, $N_j^{(k)}(\omega)$ le nombre d'euglènes présentes au jour j issues de l'euglène $\mathcal{E}_k(\omega)$ (par exemple, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $N_1^{(k)}(\omega) = 1$). Alors pour tout $j \in \mathbb{N}$, $N_{j+1}(\omega) = \sum_{k=1}^n N_{j+1}^{(k)}(\omega)$ donc $N_{j+1}(\omega) = 0$ si et seulement si pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $N_{j+1}^{(k)}(\omega) = 0$. On en déduit que

$$P(N_{j+1} = 0|N_1 = n) = P\left(\bigcap_{k=1}^n (N_{j+1}^{(k)} = 0) \mid N_1 = n\right).$$

Or, conditionnellement à l'événement $(N_1 = n)$, les comportements des n populations issues respectivement de $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n$ sont indépendants. Donc $P(N_{j+1} = 0|N_1 = n) = \prod_{k=1}^n P(N_{j+1}^{(k)} = 0|N_1 = n)$. Enfin, conditionnellement à l'événement $(N_1 = n)$, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, le comportement de la population d'euglènes issues de $\mathcal{E}_k$ est indépendant de N_1 et suit la même loi que le processus initial, avec toutefois un décalage d'un jour ; donc $P(N_{j+1}^{(k)} = 0|N_1 = n) = P(N_j = 0)$. Finalement, $P(N_{j+1} = 0|N_1 = n) = (a_j)^n$.

Q 25.3. Soit $j \in \mathbb{N}$. D'après les questions 25.1 et 25.2, $a_{j+1} = \sum_{n \in S} p_n (a_j)^n$ donc $a_{j+1} = \sum_{n \in S} P(D = n)(a_j)^n$. Par définition de S , on a donc $a_{j+1} = \sum_{n \in \mathbb{N}} P(D = n)(a_j)^n$, i.e. $a_{j+1} = G_D(a_j)$.

Q 25.4. L'hypothèse (H_4) et la question 3.1 assurent que G_D est une fonction polynomiale donc continue. Ainsi, d'après la question 24.4, $\lim_{j \rightarrow +\infty} G_D(a_j) = G_D(\alpha)$. Par ailleurs, toujours d'après la question 24.4, $\lim_{j \rightarrow +\infty} a_{j+1} = \alpha$. La question 25.3 et l'unicité de la limite assurent alors que $\alpha = G_D(\alpha)$.

Q 25.5. Soit $t \in \mathcal{F}$. On montre par récurrence que pour tout $j \in \mathbb{N}$, $a_j \leq t$. Puisque $a_0 = 0$ et que $t \geq 0$, l'initialisation $a_0 \leq t$ est vraie. Soit $j \in \mathbb{N}$ tel que $a_j \leq t$. Puisque $a_j \in [0, 1]$, que $t \in [0, 1]$ et que, d'après la question 1.3, la fonction $s \in [0, 1] \mapsto G_D(s)$ est croissante sur $[0, 1]$, on a : $G_D(a_j) \leq G_D(t)$. Or, d'après la question 25.3, $G_D(a_j) = a_{j+1}$. Par ailleurs, comme $t \in \mathcal{F}$, $G_D(t) = t$. Donc $a_{j+1} \leq t$, ce qui établit l'hérédité. Le principe de récurrence assure finalement que pour tout $j \in \mathbb{N}$, $a_j \leq t$.

Q 25.6. Soit $t \in \mathcal{F}$. La question 25.5 assure que pour tout $j \in \mathbb{N}$, $a_j \leq t$. Or, d'après la question 24.4, $\lim_{j \rightarrow +\infty} a_j = \alpha$. Ainsi $\alpha \leq t$, et ce pour tout $t \in \mathcal{F}$. Par ailleurs, d'après la question 25.4, $\alpha \in \mathcal{F}$. On en déduit que α est le plus petit élément de $\mathcal{F}$.

Q 26.

- Supposons $\alpha = 0$. Alors, comme $(N_1 = 0) \subset E_0$, $P(N_1 = 0) = 0$, i.e., d'après la question 14, $p_0 = 0$.
- Supposons $p_0 = 0$. Alors, d'après la question 1.2, $G_D(0) = 0$. Donc $0 \in \mathcal{F}$. Or, d'après la question 25.6, α est le plus petit élément de $\mathcal{F}$. Donc $\alpha \leq 0$. Comme $\alpha \geq 0$, on conclut que $\alpha = 0$.

Finalement, $\alpha = 0$ si et seulement si $p_0 = 0$.

Q 27.1. L'hypothèse (H_4) et la question 3.1 assurent que G_D est une fonction polynomiale donc deux fois dérivable. Ainsi, en tant que différence de fonctions deux fois dérivables, f est deux fois dérivable.

Q 27.2. L'hypothèse (H_4) et la preuve de la question 3.1 assurent que pour tout $t \in [0, 1]$, $f(t) = \sum_{n=0}^m P(D = n)t^n - t$ donc $f''(t) = \sum_{n=2}^m n(n-1)P(D = n)t^{n-2}$; tous les termes de cette somme étant positifs, on en déduit que $f''(t) \geq m(m-1)p_m t^{m-2}$. Or, d'après l'hypothèse (H_4) , $p_m > 0$. Donc pour tout $t \in]0, 1]$, $f''(t) > 0$ et $f''(0) \geq 0$, ce qui établit la stricte croissance de f' .

Q 27.3. Comme pour tout $t \in [0,1]$, $f(t) = \sum_{n=0}^m P(D = n)t^n - t$, on a : $f'(t) = \sum_{n=1}^m nP(D = n)t^{n-1} - 1$; en particulier $f'(0) = p_1 - 1$. Or, $1 - p_1 \geq p_m$ et, d'après l'hypothèse (H_4) , $p_m > 0$. Donc $f'(0) < 0$.

Q 28.1. L'hypothèse (H_4) et la question 3.2 assurent que $E(D) = (G_D)'(1)$ donc $f'(1) = E(D) - 1$. Comme $E(D) \leq 1$, on en déduit que $f'(1) \leq 0$.

Q 28.2. D'après la stricte croissance de f' établie à la question 27.2, pour tout $t \in [0,1[$, $f'(t) < f'(1)$. Or, d'après la question 28.1, $f'(1) \leq 0$. Donc pour tout $t \in [0,1[$, $f'(t) < 0$ et $f'(1) \leq 0$ donc f est strictement décroissante.

Q 28.3.

- D'après la stricte décroissance de f établie à la question 28.2, pour tout $t \in [0,1[$, $f(t) > f(1)$. Or, d'après la question 1.2, $G_D(1) = 1$, i.e. $f(1) = 0$. Donc pour tout $t \in [0,1[$, $f(t) > 0$ donc $t \neq G_D(t)$ i.e. $t \notin \mathcal{F}$, ce qui montre que $\mathcal{F} \cap [0,1[= \emptyset$. Le fait que $G_D(1) = 1$ assure par ailleurs que $1 \in \mathcal{F}$. Enfin, par définition, $\mathcal{F} \subset [0,1]$. On conclut que $\mathcal{F} = \{1\}$.
- Comme $\alpha \in \mathcal{F}$ d'après la question 25.4, on en déduit que $\alpha = 1$.
- Ce résultat montre que si $E(D) \leq 1$, la population d'euglènes s'éteint presque sûrement : le seuil critique d'au moins un descendant en moyenne par euglène n'est pas atteint (et d'ailleurs, même lorsque ce seuil critique vaut 1, la population d'euglènes finit quand même par s'éteindre presque sûrement).

Q 29.1. L'hypothèse (H_4) et la question 3.2 assurent que $E(X) = (G_D)'(1)$ donc $f'(1) = E(D) - 1$. Comme $E(D) > 1$, on en déduit que $f'(1) > 0$.

Q 29.2. La question 27.1 assure que f' est dérivable donc f' est continue. La question 27.2 assure par ailleurs que f' est strictement croissante. Le théorème de la bijection assure alors que f' établit une bijection de $]0,1[$ sur $] \lim_0 f', \lim_1 f' [$, c'est-à-dire sur $]f'(0), f'(1)[$. Or, les questions 27.3 et 29.1 assurent que $f'(0) < 0 < f'(1)$. On en déduit qu'il existe une unique réel $\beta \in]0,1[$ tel que $f'(\beta) = 0$.

Q 29.3. D'après la stricte croissance de f' établie à la question 27.2, pour tout $t \in [0, \beta[$, $f'(t) < f'(\beta)$. Donc pour tout $t \in [0, \beta[$, $f'(t) < 0$ et $f'(\beta) = 0$ donc $f|_{[0, \beta]}$ est strictement décroissante. De même, $f|_{[\beta, 1]}$ est strictement croissante.

Q 29.4.

- Puisque, d'après la question 29.3, $f|_{[\beta, 1]}$ est strictement croissante et que $\beta < 1$, on a : $f(\beta) < f(1)$. Or, d'après la question 1.2, $G_D(1) = 1$, i.e. $f(1) = 0$. Donc $f(\beta) < 0$. Par ailleurs, d'après la question 1.2, $G_D(0) = p_0$. Donc $f(0) = p_0$. Récapitulons :

$f|_{[0, \beta]}$ décroît strictement, $f|_{[\beta, 1]}$ croît strictement, $f(0) = p_0 \geq 0$, $f(\beta) < 0$ et $f(1) = 0$.

Comme f est continue (puisque deux fois dérivable d'après la question 27.1), le théorème de la bijection assure alors que f réalise une bijection de $[0, \beta]$ sur $[f(\beta), p_0]$ et une bijection de $[\beta, 1]$ sur $[f(\beta), 0]$. Comme $0 \in [f(\beta), p_0]$, on dispose d'un unique réel $\gamma \in [0, \beta]$ tel que $f(\gamma) = 0$. De même, on dispose d'un unique réel $\delta \in [\beta, 1]$ tel que $f(\delta) = 0$. Comme $f(\beta) < 0$ et $f(1) = 0$, on en déduit que $\gamma < \beta$ et $\delta = 1$. Donc $\mathcal{F} = \{\gamma, 1\}$. Or, d'après la question 25.6, α est le plus petit élément de $\mathcal{F}$. Donc $\alpha = \gamma$ et $\mathcal{F} = \{\alpha, 1\}$.

- Puisque $\alpha = \gamma < \beta < 1$, on en déduit que $\alpha < 1$.
- Ce résultat montre que si $E(D) > 1$, la population d'euglènes peut ne pas s'éteindre : le seuil critique d'au moins un descendant en moyenne par euglène est atteint (strictement).

Q 30.

```
def proba_extinction(epsilon):
    a = 0
    c = 1
    while c-a > epsilon:
```

```

b = (a+c)/2
if G_D(b) > b:
    a = b
else:
    c = b
return c

```

Q 31.1. La question 1.6 assure que les v.a. $t^{X_0}, \dots, t^{X_{n-1}}$ admettent des variances. Donc $\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} t^{X_j}$ admet une variance. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev assure alors que

$$P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} t^{X_j} - E\left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} t^{X_j}\right)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{V\left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} t^{X_j}\right)}{\varepsilon^2}. \quad (2)$$

Or, comme les v.a. $X_0, \dots, X_{n-1}$ sont indépendantes, les v.a. $t^{X_0}, \dots, t^{X_{n-1}}$ le sont aussi. On en déduit que $V\left(\sum_{j=0}^{n-1} t^{X_j}\right) = \sum_{j=0}^{n-1} V(t^{X_j})$. Or, toujours d'après la question 1.6, pour tout $j \in \{0, \dots, n-1\}$, $V(t^{X_j}) \leq 1$.

Ainsi $V\left(\sum_{j=0}^{n-1} t^{X_j}\right) \leq n$ puis $V\left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} t^{X_j}\right) = \frac{1}{n^2} V\left(\sum_{j=0}^{n-1} t^{X_j}\right) \leq \frac{1}{n}$. Par ailleurs, d'après la question 1.5, pour tout $j \in \{0, \dots, n-1\}$, $E(t^{X_j}) = G_{X_j}(t)$. Or, X_j a même loi que X . Donc d'après la question 4 (sens facile), $G_{X_j} = G_X$. Ainsi, par linéarité de l'espérance, $E\left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} t^{X_j}\right) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} E(t^{X_j}) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} G_X(t) = G_X(t)$.

L'inégalité (2) devient alors $P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} t^{X_j} - G_X(t)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{n\varepsilon^2}$.

Q 31.2. Notons, pour tout $i \in \{0, 1, \dots, p\}$, $\overline{A_i}$ le complémentaire de l'événement A_i . Alors d'après la question 31.1, pour tout $i \in \{0, 1, \dots, p\}$, $P(\overline{A_i}) = P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{i}{p}\right)^{X_j} - G_X\left(\frac{i}{p}\right)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{n\varepsilon^2}$. Donc

$P\left(\bigcup_{i=0}^p \overline{A_i}\right) \leq \sum_{i=0}^p P(\overline{A_i}) \leq \sum_{i=0}^p \frac{1}{n\varepsilon^2} = \frac{p+1}{n\varepsilon^2}$. Comme $\bigcap_{i=0}^p A_i$ est le complémentaire de $\bigcup_{i=0}^p \overline{A_i}$, on en déduit que $P\left(\bigcap_{i=0}^p A_i\right) \geq 1 - \frac{p+1}{n\varepsilon^2}$.

Q 31.3. D'après la question 31.2, il suffit que $1 - \frac{p+1}{n\varepsilon^2} \geq 1 - \eta$ pour garantir que $P\left(\bigcap_{i=0}^p A_i\right) \geq 1 - \eta$. Par conséquent, si $n \geq \frac{p+1}{\eta\varepsilon^2}$, alors $P\left(\bigcap_{i=0}^p A_i\right) \geq 1 - \eta$.

Q 32.1. La ligne 4 introduit l'entier $n = \left\lceil \frac{p+1}{\eta\varepsilon^2} \right\rceil + 1$. Ainsi, $n > \frac{p+1}{\eta\varepsilon^2}$ donc la condition suffisante trouvée à la question 31.3 est satisfaite.

Q 32.2. Pour tout $i \in \{0, \dots, p\}$, $x[i]$ est égal à $\frac{i}{p}$ et pour tout $j \in \{0, \dots, n-1\}$, `echantillon[j]` correspond à X_j . Les lignes 7 et 8 permettent donc de calculer $\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{i}{p}\right)^{X_j}$, qu'on stocke dans `y_empir[i]` à l'issue de la boucle sur j .

Q 32.3. La question 32.2 assure que, à l'issue de la boucle sur i , `y_empir` est la liste des $\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{i}{p}\right)^{X_j}$

lorsque i décrit $\{0, \dots, p\}$. Ainsi $y_{\max}$ est la liste des $\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{i}{p}\right)^{X_j} + \varepsilon$ et $y_{\min}$ celle des $\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{i}{p}\right)^{X_j} - \varepsilon$.

Q 32.4.

- Pour tout $i \in \{0, \dots, p\}$, les lignes 9 et 10 assurent que $y_{\max}[i] - y_{\min}[i] = 2\varepsilon$ donc le segment $S_i = [M_i, N_i]$ est de longueur 2ε .
- D'après la question 32.3, pour tout $i \in \{0, \dots, p\}$, M_i a pour coordonnées $\left(\frac{i}{p}, \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{i}{p}\right)^{X_j} + \varepsilon\right)$ et N_i a pour coordonnées $\left(\frac{i}{p}, \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{i}{p}\right)^{X_j} - \varepsilon\right)$. On en déduit que l'événement « la courbe représentative de G_X intersecte $S_0, \dots, S_p$ » est l'événement $\bigcap_{i=0}^p A_i$. Or, d'après les questions 31.3 et 32.1, cet événement a une probabilité au moins égale à $1 - \eta$. D'où le résultat.

Q 33.

```
def trace2(p, liste):
    x = [i/p for i in range(p+1)]
    y = [0 for i in range(p+1)]
    m = len(liste)-1
    for i in range(p+1):
        for n in range(m+1):
            y[i] = y[i] + liste[n]*x[i]**n
    plt.plot(x, y)
    plt.show()
```